

Correction Feuille Exercice 9

✎ Déterminer la loi d'une VA discrète finie, son espérance et sa variance

Exercice 13

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs 0,1,2 ou 3. On donne

$$P(X = 0) = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Comme les événements $(X = 2)$ et $(X = 3)$ sont équiprobables, On a $P(X = 2) = P(X = 3)$. De plus, comme $(X = i)_{i \in \{0,3\}}$ est un système complet d'évènements alors

$$\begin{aligned} P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) &= 1 \\ \iff \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + 2P(X = 2) &= 1 \\ \iff 2P(X = 2) &= 1 - \frac{6}{10} \\ \iff 2P(X = 2) &= \frac{4}{10} \\ \iff \boxed{P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}} \end{aligned}$$

2. La loi de X , c'est tout simplement les probabilités calculées à la question 1. On peut le récapituler dans un tableau :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

On utilise la formule pour calculer l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^3 kP(X = k) \\ &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \\ &= \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Pour déterminer la variance, on commence par calculer :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^3 k^2P(X = k) \\ &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} \\ &= \boxed{\frac{31}{10}} \end{aligned}$$

On n'oublie pas de donner la variance à l'aide de la formule de Koëning-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{31}{10} - \frac{9}{4} = \frac{17}{20}$$

Exercice 14 (*)

Soit X le gain du joueur, on a $X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\}$. Afin de simplifier, on considère sans perte de généralité que l'on mise toujours sur le 6. On note alors A_k : "Obtenir un 6 au k -ème tirage". Les évènements A_1 , A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants. Donc

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$

Les évènements $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ et $\overline{A_3}$ sont également mutuellement indépendants et

$$\begin{aligned} P(X = -1) &= P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \\ &= P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3}) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{125}{216} \end{aligned}$$

Il est plus complexe de déterminer les autres probabilités. En effet,

$$(X = 2) = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$$

Or ces évènements sont deux à deux incompatibles et

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= 3P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \\ &= 3 \times P(A_1) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3}) \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{15}{216} \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= 1 - P(X = -1) - P(X = 2) - P(X = 3) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{216} + \frac{125}{216} + \frac{15}{216} \right) \\ &= \frac{75}{216} \end{aligned}$$

☞ **Remarque :** On aurait également pu effectuer le même raisonnement que pour $P(X = 2)$.

L'espérance est alors donnée par

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times P(X = -1) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) \\ &= -\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{30}{216} + \frac{3}{216} \\ &= -\frac{17}{216} \end{aligned}$$

Pour déterminer la variance, on calcule tout d'abord $E(X^2)$ en utilisant le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-1)^2 \times P(X = -1) + 1 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) \\ &= \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{60}{216} + \frac{9}{216} \\ &= \frac{269}{216} \end{aligned}$$

La variance est alors donnée par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{269}{216} - \left(-\frac{17}{216}\right)^2 \\ &= \frac{269}{216} - \frac{289}{46656} \\ &\approx 1,2413 \end{aligned}$$

☞ **Remarque :** L'exercice est inspiré d'un jeu de casino appelé le Sic Bo. Ce qui explique que l'espérance associée au gain du joueur soit négative.

Exercice 15 (*)

On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

Comme on ne remet pas la boule tirée, l'écart entre les boules sera au moins de 1. L'écart maximum sera obtenue en tirant la boule n° 5 et la boule n° 1. Ainsi,

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$$

On note A_k : "On tire la boule n° k au premier tirage" et B_k : "On tire la boule n° k au second tirage". On a alors

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P((A_5 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_5)) \\ &= P(A_5 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_5) \\ &= P(A_5)P_{A_5}(B_1) + P(A_1)P_{A_1}(B_5) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

On peut également résoudre ce problème à l'aide du dénombrement. Ω est l'ensemble des 2-Arrangement de l'ensemble E des boules. Ainsi, $\Omega = 5 \times 4 = 20$. Or

$$(X = 3) = \{(1, 4); (2, 5); (5, 2); (4, 1)\}$$

Ainsi $\text{card}(X = 3) = 4$ et donc

$$P(X = 3) = \frac{\text{card}(X = 3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

De la même façon,

$$(X = 2) = \{(1, 3); (2, 4); (3, 5); (5, 3); (4, 2); (3, 1)\}$$

Ainsi $\text{card}(X = 2) = 6$ et donc

$$P(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

et

$$(X = 1) = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 4); (4, 3); (3, 2); (2, 1)\}$$

Ainsi $\text{card}(X = 1) = 8$ et donc

$$P(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

En conclusion (on vérifie que la somme fait bien 1),

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

On calcule alors l'espérance de la variable aléatoire X ,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{9}{10} + \frac{8}{5} \\ &= \frac{30}{10} = 3 \end{aligned}$$

Afin de calculer la variance, on calcule $E(X^2)$ avec le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) + 4^2 \times P(X = 4) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{5} + \frac{27}{10} + \frac{32}{5} \\ &= \frac{100}{10} = 10 \end{aligned}$$

La variance est alors donnée par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 10 - (3)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 16 (**)

Soient $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère la VA X à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ telle que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(X = k) = a \binom{n}{k}$$

1. On définit une loi de probabilité si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(X = k) = 1 &\iff \sum_{k=0}^n a \binom{n}{k} = 1 \\ &\iff a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} = 1 \\ &\iff a \times 2^n = 1 \\ &\iff \boxed{a = \frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

2. (a) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}}$$

(b) D'après la formule sur l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \times \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{n}{2^n} \times 2^{n-1} \\ &= \boxed{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Reconnaître une loi usuelle

Exercice 17

On lance 20 fois une pièce ayant la probabilité p de faire pile. Dans les cas suivants, déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

- On note X le nombre de pile obtenue. On peut obtenir entre 0 et n piles donc $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. On compte le nombre de succès d'une répétition d'épreuves de Bernoulli (Obtenir pile) ayant pour probabilité de succès p . Donc X suit une loi binomiale de paramètre 20 et p .

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, p) \text{ et } E(X) = 20p, V(X) = 20p(1-p)$$

- On note X la variable aléatoire valant 1 si l'on a que des piles et 0 sinon. On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ donc X suit une loi de Bernoulli. On calcule $P(X = 1) = p^{20}$ (on tire 20 piles sur 20 lancers). Ainsi

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p^{20}) \text{ et } E(X) = p^{20}, V(X) = p^{20}(1-p^{20})$$

- On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers. $X(\Omega) = \{20\}$ donc X est une loi certaine. Ainsi

$$E(X) = 20 \text{ et } V(X) = 0.$$

- On gagne 2 euros si on obtient plus de piles que de face. On perd 2 euros sinon et on perd 1 euro en cas de match nul. On note X le gain et $X(\Omega) = \{-2, -1, 2\}$. On note Y la variable aléatoire comptant le nombre de pile. Ainsi

$$P(X = 2) = P(Y \geq 11) = \sum_{k=11}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}$$

$$P(X = -2) = P(Y \leq 9) = \sum_{k=0}^9 \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}$$

$$P(X = -1) = P(Y = 10) = \binom{20}{10} p^{10} (1-p)^{10}$$

Le calcul de l'espérance et de la variance est complexe ici et

$$E(X) = 2P(X = 2) - 2P(X = -2) - P(X = -1)$$

Exercice 18 (*)

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant :

- Ou bien une seule marche avec la probabilité p .
- Ou bien 2 marches avec la probabilité $1-p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

- Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille et on note X_n le nombre de fois ou la grenouille a sauté une marche. La grenouille peut sauter entre 0 et n fois une marche et donc $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. On compte le nombre de succès d'une expérience de Bernoulli ("Sauter une marche") de probabilité de succès p . Ainsi

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

- On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de marches franchies. Afin de compter le nombre de marches franchies, on a

$$Y_n = 1 \times X_n + 2 \times (n - X_n)$$

La grenouille saute X_n fois une seule marche et elle saute donc $(n - X_n)$ fois deux marches. Une autre façon de modéliser l'expérience est de dire que la grenouille saute au maximum $2n$ marches auxquelles il faut retrancher les X_n fois où elle n'a sauté qu'une seule marche :

$$Y_n = 2n - X_n$$

En utilisant cette formule, on a

$$E(Y_n) = E(2n - X_n) = 2n - E(X_n) = 2n - np.$$

ainsi que

$$V(Y_n) = V(2n - X_n) = V(X_n) = np(1 - p).$$

Exercice 19 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On considère n joueurs visant une cible. Chacun des joueurs effectue 2 tirs. A chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

1. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ donc X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p).$$

2. On pose $X = X_1 + \dots + X_n$. On a $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. X est une somme de variable aléatoire de Bernoulli. X suit donc une loi binomiale de paramètre n et p . Ainsi,

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

3. On note Z la VA égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des 2 tirs. Ainsi, Z compte le nombre de succès de la loi de Bernoulli "Atteindre la cible au moins une fois". Cette loi de Bernoulli a pour probabilité de succès $1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2$. Donc Z suit une loi binomiale

$$Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 2p - p^2)$$

4. On pose la VA $Y = Z - X$.

Y représente le nombre de joueurs ayant atteint leur cible au second tir mais pas au premier.

On a alors $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Y compte le nombre de succès suivant : "On atteint la cible au second tir mais pas au premier". La probabilité de cet événement est $(1 - p)p$ (On rate la cible au premier tirage et on réussit au second tirage - événements indépendants).

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p(1 - p))$$

Une autre méthode permet de trouver Y . Bien que plus longue et calculatoire, il faudra maîtriser ce genre de calcul en deuxième année. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(Z - X = k) \\ &= P\left(\bigcup_{j=0}^{n-k} (X = j) \cap (Z = j + k)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} P((X = j) \cap (Z = j + k)) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} P(X = j)P_{X=j}(Z = j + k) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} P_{X=j}(Z = j + k) \end{aligned}$$

Or, sachant $X = j$ (i.e. j personnes ont réussi leur premier lancer), $Z = j + k$ si et seulement si k personnes ont réussi à atteindre la cible au deuxième lancer sur les $n - j$ personnes restantes. Donc

$$P_{X=j}(Z = j + k) = \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k} p^j (1-p)^{n-j} p^k (1-p)^{n-j-k} \\ &= p^k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!} p^j (1-p)^{2n-2j-k} \\ &= p^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-j-k)!} p^j (1-p)^{2n-2k-2j} (1-p)^k \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} p^j ((1-p)^2)^{n-k-j} \\ &= \binom{n}{k} (p(1-p))^k (p + (1-p)^2)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} (p(1-p))^k (1 - p(1-p))^{n-k} \end{aligned}$$

On reconnaît alors la formule d'une loi binomiale de paramètre n et $p(1-p)$.